Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

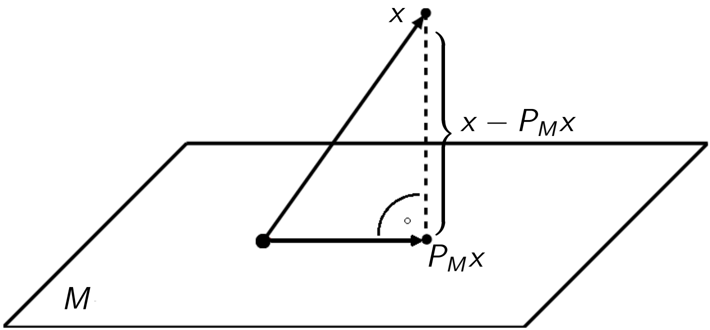
Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 8

Rzutu ortogonalny II

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

H – ustalona przestrzeń Hilberta. **Rzut ortogonalny** $x \in H$ na podprzestrzeń $M \subseteq H$ to $P_M x \in M$ taki, że $x - P_M x \perp M$.



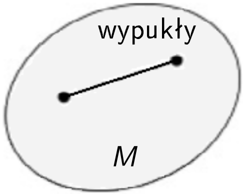
Problem: Czy rzut ortogonalny $P_M x$ istnieje?

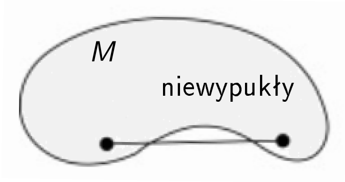
Rysunek sugeruje, że

$$\|x - P_M x\| = dist(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Powyższe infimum realizuje się w dokładnie jednym punkcie, jeśli M jest domkniętym zbiorem wypukłym!

Zbiór $M \subseteq H$ jest **wypukły**, gdy $\forall_{x,y\in M}\forall_{\lambda\in[0,1]}\lambda x + (1-\lambda)y \in M$, czyli gdy każdy odcinek o końcach w M cały zawiera się w M:





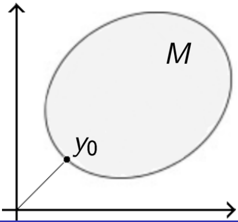
Tw. (O odległości od zbioru wypukłego)

Niech H przestrzeń Hilberta. Dla dowolnego domkniętego zbioru wypukłego $M \subseteq H$ oraz punktu $x \in H$ istnieje dokładnie jeden $y_0 \in M$ taki, że $\|x - y_0\| = dist(x, M)$.

Dowód: "Przesuwając" zbiór M możemy założyć że $x = 0$. Wtedy twierdzenie przyjmuje postać:

W domkniętym i wypukłym zbiorze M istnieje dokładnie jeden element o minimalnej normie:

$$\exists!_{y_0\in M}\ \|y_0\| = \inf_{y\in M}\|y\|.$$



"**Istnienie**". Połóżmy $d := \inf_{y \in M} \|y\|$ i niech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ taki, że $\|y_n\| \to d$. Wystarczy pokazać, że $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy, bo wtedy na mocy zupełności H i domkniętości M, ciąg ten jest zbieżny do pewnego $y_0 \in M$ i wtedy $\|y_0\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = d$.

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &\underset{\text{równoległoboku}}{\overset{\text{tożsamość}}{=\!=\!=}} 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - \|y_n + y_m\|^2 \\
&= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\left\|\tfrac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \qquad \begin{cases} \frac{y_n+y_m}{2} \in M \\ \text{bo } M \text{ wypukły} \end{cases} \\
&\leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.
\end{aligned}$$

"**Jednoznaczność**". Jeżeli $y_1,\ y_2 \in M$ takie, że $\|y_1\| = \|y_2\| = d$, to powyższy rachunek pokazuje, że $y_1 = y_2$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
\|y_1 - y_2\|^2 &\underset{\text{równoległoboku}}{\overset{\text{tożsamość}}{=\!=\!=}} 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - \|y_1 + y_2\|^2 \\
&= 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - 4\left\|\tfrac{y_1+y_2}{2}\right\|^2 \qquad \begin{cases} \frac{y_n+y_m}{2} \in M \\ \text{bo } M \text{ wypukły} \end{cases} \\
&\leq 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - 4d^2 = 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Tw. O istnieniu rzutu ortogonalnego

Dla domkniętej podprzestrzeni $M \subseteq H$ przestrzeni Hilberta H oraz punktu $x \in H$ istnieje rzut ortogonalny $y = P_M x$. Co więcej,

$$\|x - y\| = dist(x, M) \tag{1}$$

i rzut y jest przez tę równość wyznaczony jednoznacznie.

Dowód: Skoro M jest zbiorem wypukłym, to na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje dokładnie jeden $y \in M$ spełniający (1). Musimy pokazać, że $x - y \perp M$. Niech $z \in M$. Dla $t \in \mathbb{F}$ mamy

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 \underset{y+tz \in M}{\overset{(1)}{\leq}} \|x - (y + tz)\|^2 &= \|(x - y) + tz\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x - y, tz\rangle + |t|^2\|z\|^2.\end{aligned}$$

Stąd $0 \leq |t|^2\|z\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x - y, tz\rangle$ dla $t \in \mathbb{F}$. Kładąc $t = se^{i\varphi}$, gdzie $s \in \mathbb{R}$ i $\varphi := \arg\langle x - y, z\rangle$ nierówność ta przyjmuje postać

$$0 \leq s^2|e^{i\varphi}|^2\|z\|^2 - 2s\,\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}\langle x - y, z\rangle) = s^2\|z\|^2 - 2s|\langle x - y, z\rangle|.$$

Czyli funkcja kwadratowa $f(s) = s^2\|z\|^2 - 2s|\langle x-y, z\rangle|$ jest nieujemna. Skoro f miejsce zerowe dla $s = 0$, to jej wyróżnik $\Delta = 4|\langle x-y, z\rangle|^2$ musi wynosić zero, czyli $\langle x-y, z\rangle = 0$, tzn. $x - y \perp z$. ■

Wn. (Rozkład przestrzeni Hilberta) Dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni M przestrzeni Hilberta H mamy

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

czyli $\forall_{x\in H}\ \exists!_{y\in M}\exists!_{z\in M^{\perp}}\ x = y + z$.

Dowód: Niech $x \in H$. Połóżmy $y := P_M x$ oraz $z := x - y$. Wtedy $x = y + z$ oraz z definicji rzutu mamy $y \in M$ i $x - y \perp M$, tzn. $z \in M^{\perp}$. Aby pokazać jednoznaczność tego rozkładu załóżmy, że $x = y' + z'$ dla pewnych $y' \in M$ i $z' \in M^{\perp}$. Wtedy

$$y - y' = z' - z$$

oraz $y - y' \in M$ i $z - z' \in M^{\perp}$. Ale $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ (bo zero jest jedynym wektorem izotropowym). Zatem $y = y'$ oraz $z = z'$. ■

Uw. Tezę powyższego wniosku można też zapisać jako

$$1 = P_M + P_{M^\perp},$$

gdzie 1 jest operatorem identycznościowym na H oraz P_M jest odwzorowaniem $H \ni x \to P_M x \in M \subseteq H$.W szczególności, jeśli P_M jest rzutem ortogonalnym na domkniętą podprzestrzeń M, to $1 - P_M$ jest rzutem na jej dopełnienie ortogonalne $M^\perp$:

$$P_{M^\perp} = 1 - P_M.$$

Wn. $(M^\perp)^\perp = M$ dla domkniętej podprzestrzeni $M \subseteq H$.

Dowód: $P_{(M^\perp)^\perp} = 1 - P_{M^\perp} = 1 - (1 - P_M) = P_M$. ■

Stw. Rzut ortogonalny P_M jest ograniczonym operatorem liniowym o normie 1 (chyba, że $M = \{0\}$ i wtedy $P_M \equiv 0$).

Dowód:

"**Liniowość**". Niech $x, y \in H$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Chcemy wykazać, że $P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$. Z definicji $P_M(\alpha x + \beta y)$ to jedyny element w M taki, że $(\alpha x + \beta y) - P_M(\alpha x + \beta y) \perp M$. Wystarczy zatem pokazać, że wektor $\alpha P_M x + \beta P_M y$ ma te same własności. Jasne, że $\alpha P_M x + \beta P_M y \in M$ bo M przestrzeń liniowa. Z liniowości (w pierwszym argumencie) iloczynu skalarnego, dla $z \in M$ mamy

$$\begin{aligned}\langle (\alpha x + \beta y) - (\alpha P_M x + \beta P_M y), z\rangle &= \alpha\langle x - P_M x, z\rangle + \beta\langle y - P_M y, z\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

bo $x - P_M x$ oraz $y - P_M y$ są ortogonalne do M z definicji rzutu. Zatem $(\alpha x + \beta y) - (\alpha P_M x + \beta P_M y) \perp M$.

"**Ograniczoność**". Dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$\|P_M x\|^2 \leq \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2 =$$

Pitagoras

$$= \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2$$

$$\overset{1 = P_M + P_{M^\perp}}{=} \|x\|^2.$$

Stąd $\|P_M\| \leq 1$. Jeżeli $P_M \neq 0$, to $M \neq \{0\}$ i istnieje $x \in M$ o normie 1. Skoro $P_M x = x$, to $\|P_M x\| = \|x\| = 1$, czyli $\|P_M\| \geq 1$. Zatem $\|P_M\| = 1$. ■

Tw. Niech $P : H \to H$ liniowy idempotent, tzn. $P^2 = P$. NWSR:

1. P jest rzutem ortogonalnym (na PH),
2. P jest samosprzężony, tzn. $\forall_{x,y\in H}\ \langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ $(P = P^*)$,
3. P jest kontrakcją, tzn. $\|P\| \le 1$ (dokładniej $\|P\| = 1$ lub $P = 0$).

Dowód: (1)⇒(2). Dla $x, y \in H$ mamy

$$\langle Px, y\rangle \overset{y=Py+(1-P)y}{=} \langle Px, Py\rangle + \langle Px, (1-P)y\rangle \overset{PH\perp(1-P)H}{=} \langle Px, Py\rangle$$
$$\overset{PH\perp(1-P)H}{=} \langle Px, Py\rangle + \langle (1-P)x, Py\rangle \overset{x=Px+(1-P)x}{=} \langle x, Py\rangle.$$

(2)⇒(3). Dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle \overset{2}{=} \langle P(Px), x\rangle \overset{P^2=P}{=} \langle Px, x\rangle \overset{N.Schwartza}{\le} \|Px\|\cdot\|x\|.$$

(3)⇒(1). Potrzebujemy pokazać, że $x - Px \perp PH$ dla $x \in H$.

Hint: Niech $x \in \ker P$ oraz $y \in PH$. Wtedy dla $t \in \mathbb{F}$ dostajemy

$$\|y\|^2 = \|Py + tPx\|^2 = \|P(y+tx)\|^2 \overset{\|P\|\le 1}{\le} \|y+tx\|^2 = \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, t\langle x, y\rangle + |t|^2\|x\|^2.$$

To implikuje, że rzeczywista funkcja $f(s) = 2s|\langle x, y\rangle| + s^2\|x\|^2 \ge 0$ jest nieujemna. Stąd $\langle x, y\rangle = 0$.

Niech $H = L^2(\mu)$ gdzie (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą.

Prz. (Mnożenie przez funkcję charakterystyczną)

Jeśli $A \in \Sigma$, to $\{f \in L^2(\mu) : f$ zeruje się poza $A\}$ jest domkniętą podprzestrzenią H, którą można utożsamiać z przestrzenią $L^2(\mu|_{\Sigma_A})$ zadaną przez przestrzeń z miarą $(A, \Sigma_A, \mu|_{\Sigma_A})$, gdzie $\Sigma_A = \{B \in \Sigma : B \subseteq A\}$. Rzut ortogonalny z $L^2(\mu)$ na $L^2(\mu|_{\Sigma_A})$ jest operatorem mnożenia przez funkcję charakterystyczną 1_A zbioru A:

$$P_{L^2(\mu|_{\Sigma_A})} f = 1_A \cdot f, \qquad f \in L^2(\mu)$$

Prz. (Warunkowa wartość oczekiwana)

Jeśli $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$ jest σ-podalgebrą, to $\{f \in L^2(\mu) : f$ jest $\mathcal{F}$-mierzalna$\}$ jest domkniętą podprzestrzenią H izometrycznie izomorficzną z $L^2(\mu|_{\mathcal{F}})$. Zatem istnieje rzut ortogonalny z $L^2(\mu)$ na $L^2(\mu|_{\mathcal{F}})$. Rzut ten w rachunku prawdopodobieństwa nazywany jest **warunkową wartością oczekiwaną pod warunkiem $\mathcal{F}$**

$$P_{L^2(\mu|_{\mathcal{F}})} f = E(f, \mathcal{F}), \qquad f \in L^2(\mu).$$